7- лекция. Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

7 –лекция.
7 Қатарлар теориясы

Бұл курста біз сандық және функционалдық қатарларды қарастырамыз.

Анықтама. Берілген шектеусіз сандар тізбегі $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ үшін:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

өрнегі сандық қатар деп аталады, мұндағы $a_i, i = 1,2,...$ сандары – қатардың мүшелері.

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, n = 1,2,...$$

саны қатардың дербес қосындысы деп аталады.

Анықтама. Егер $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, шегі табылатын болса, онда S (1) қатардың қосындысы деп аталады.

Анықтама. Егер S тұрақты санға тең болса, қатар жинақты деп аталады, кері жағдайда, яғни, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі шексіздікке тең болса немесе табылмаса, онда қатар жинақсыз деп аталады.

14.1 мысал. Қатардың қосындысын табу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

Шешімі:

Қатардың жалпы мүшесі: $a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$.

Алынған формуланы қолданып, қатардың n-шідербес қосындысын табайық :

$$S_n = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + ... + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + ... + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Ендеше, берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S = \frac{11}{18}$.

14.2-мысал. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ..., \quad a \neq 0$ түріндегі қатарды (геометриялық прогрессия) қарастырайық. Онда бөлік қосынды:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

1) Егер $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

7- лекция. Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

2) Егер $|q|>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=\infty \Rightarrow \dfrac{a-aq^n}{1-q} \to \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

3) Егер $|q|=1$, онда

а) $q=1 \Rightarrow a+a+...+a+... \Rightarrow S_n = n\cdot a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = \infty$ ($a>0$ болса)

б) $q=-1 \Rightarrow a-a+a-a+... \Rightarrow S_n=0$, егер n-жұп болса және $S_n=a$, егер n-тақ болса, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

Сонымен, қатар $|q|<1$ болғанда ғана жинақты.

Қатардың соңғы мүшелерін лақтырып тастағаннан оның жинақтылығы өзгермейді.

Жинақты қатар:

$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$

үшін келесі теңдіктер орынды:

а) $ca = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$, $c - const$

б) $a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n + b_n) + ...$

Қатардың жинақтылығының қажетті шарты. Егер (1) қатар жинақты болса, онда n – мүшесінің шегі n шексіз өскенде нольге тең болады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

14.3 мысал $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{3n-1}+...$ қатары жинақсыз, себебі қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болу шартынан қатардың жинақты екені шықпайды.

Қатардың S_n дербес қосындысының ақырлы формуласын анықтау кей жағдайларда қиындық туғызуы мүмкін. Сондықтан, қатардың жалпы мүшесін білу ғана жеткілікті болатын қатардың жинақтылығының жеткілікті белгілерін білген жөн. Тек қана таңбалары оң қатарлар үшін ғана ақиқат болатын белгілерге тоқталайық.

Мүшелері оң сандар болатын қатарларды қарастырамыз:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (2)$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (3)$$

Салыстыру белгілері:

1. Егер қандай да бір N нөмірінен бастап, $a_n \le b_n$, $n = N, N+1,...$ теңсіздігі орынды болса, онда

а) (3) қатарының жинақтылығынан (2) қатарының жинақты екені шығады,

б) (2) қатарының жинақсыздығынан (3) қатарының жинақсыз екені шығады.

7- лекция. Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

2. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$ ақырлы шегі табылса, онда (1) және (2) қатарлары не екеуі де бірдей жинақты, не екеуі де бірдей жинақсыз.

Даламбер белгісі (Коши):

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$, мұндағы l -ақырлы сан болса, онда:

а) егер $l<1$ болса, онда (1) қатары жинақты,

б) егер $l>1$ болса, (1) қатары жинақсыз, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$

в) $l=1$ қатардың жинақтылығы туралы сұрақ ашық қалады.

Ескерту. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$ болса, онда қатар жинақсыз болады.

Кошидің интегралдық белгісі:

Қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N\geq a_{N+1}\geq a_{N+2}\geq ...$ теңсіздігі орындалсын және $f(x)$ функциясы мынадай үздіксіз өспелі емес функция болсын: $f(N)=a_N, f(N+1)=a_{N+1},...$. Онда, егер $\int\limits_N^\infty f(x)dx$ жинақты (жинақсыз) болса, онда (1) қатары жинақты (жинақсыз).

14.4 – мысал. Берілген қатарды жинақтылыққа зертте:

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+...+\frac{1}{n^p}+...,\ p>0-const. \qquad (4)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ - қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалады.

$\frac{1}{1^p}>\frac{1}{2^p}>\frac{1}{3^p}>...$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $N=1$ деп алып, Кошидің интегралдық белгісін қолдансақ;

а) $p=1$ болса, онда $I=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim\limits_{N\to\infty}ln\,x\Big|_1^N=\lim\limits_{N\to\infty}\left(ln\,N-ln1\right)=\infty$, яғни, интеграл жинақсыз. б) $I=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^N=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{N\to\infty}\left(N^{1-p}-1\right)$.

Бұл интеграл $p>1$ болғанда жинақты, ал $p<1$ жинақсыз.

Ендеше, (4) қатары $p>1$ болғанда ғана жинақты, ал қалған жағдайларда жинақсыз.

Егер p=1 болса, (4) қатары гармониялық қатар болады және ол жинақсыз. Ал $p\neq 1$ болса, онда (4) Дирихле қатары деп аталады.

7- лекция. Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.

3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 3 бөлім Бастау, 2008

4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.